

Pladers Beregning ved successive Approximationer

Bent Cardan

Tidsskrifter

BSM 10-1 Bygningsstatistiske Meddelelser

1938

PLADERS BEREGNING VED SUCCESSIVE APPROXIMATIONER

AF BENT CARDAN

Den fundamentale Differentialligning af 4. Orden til Behandling af plane Plader (Lagrange's Ligning)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = p \frac{1 - \nu^2}{EI} \quad (1)$$

kan som bekendt deles i to Differentialligninger af 2. Orden (Poisson's Ligninger)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -p \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -U \frac{1 - \nu^2}{EI}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

hvor $U = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1 + \nu}$. Da Summen af Momenterne i to paa hinanden vinkelrette Snit er konstant, er U en Skalar og benævnes Skalarmomentet.

Poisson's Ligninger er analoge med Differentialligningerne til Bestemmelse af Momenter og Nedbøjninger i Bjælker.

Snitmomenterne bestemmes af følgende Ligninger:

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} &= - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \frac{EI}{1 - \nu^2} \\ M_{yy} &= - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \frac{EI}{1 - \nu^2} \\ M_{xy} &= - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{EI}{1 - \nu^2} (1 - \nu). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Forskydningskræfterne og Tangenthældningerne bestemmes af

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, & T_y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ t_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & t_y &= \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

For Plader, der er simpelt understøttede paa plane polygonale Randkurver, bliver Randbetingelserne

$$U = 0, \quad u = 0. \quad (5)$$

Saadanne Plader kaldes statisk bestemte, idet Skalarmomenterne (og Forskydningskræfterne) kan beregnes uafhængigt af Nedbøjningerne.

U og u kan i dette Tilfælde opfattes som Nedbøjningsflader (Strækflader) for en elastisk Hinde, der er udspændt med konstant Spænding over Pladens Randkurve og belastet med henholdsvis p og $U \frac{1-\nu^2}{EI}$. Strækflader ses at være analoge med Tovpolygoner for Bjælker.

Beregning af Skalarmomenter.

I Fig. 1 er vist et Udsnit af en Plade, opdelt i kvadratiske Elementer med Sidelinien λ . Den ydre Belastning tænkes virkende som Enkeltkræfter, der angriber i Systempunkterne. Der betragtes nu den U -Flade, der har

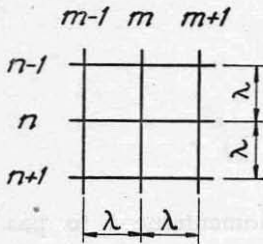


Fig. 1.

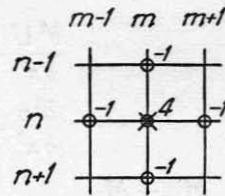


Fig. 2.

Værdien 1 i Punkt (n, m) og Værdien Nul i Pladens øvrige Systempunkter. Ifølge (2) vil den hertil svarende Belastning være den i Fig. 2 viste. Det ses, at Kraftsystemet har Form som en ν -Belastning. Kraften 4 kaldes ν -Kraften i Punkt (n, m) , medens Kræfterne -1 kaldes de konjugerede Kræfter. Mere almindeligt kan en ν -Belastning skrives

$$\begin{array}{c} -\frac{P}{4} \\ -\frac{P}{4} \quad P \quad -\frac{P}{4} \\ -\frac{P}{4} \end{array} \quad (6)$$

Den hertil svarende U -Flade har Værdien $\frac{P}{4}$ i det Systempunkt, hvor Kraften P (ν -Kraften) virker, Værdien Nul i de øvrige Systempunkter.

Tænker man nu Belastningen paa en vilkaarligt belastet Plade opløst i Belastninger af Formen (6), kan Skalarmomentet i et vilkaarligt Systempunkt findes som Summen af ν -Kræfterne i Punktet, multipliceret med Faktoren $\frac{1}{4}$. Denne Opløsning udføres simplest ved Hjælp af successive Approximationer.

Principielt kan Fremgangsmaaden være følgende:

De virkende ydre Kræfter opfattes som ν -Kræfter, og de tilsvarende konjugerede Kræfter anbringes i de respektive Punkter. Derefter bortskaffes de konjugerede Kræfter ved Tilføjelse af Kræfter, der er lig og modsat rettede Summen af de i de enkelte Punkter virkende konjugerede Kræfter. De til dette nye Kraftsystem svarende konjugerede Kræfter bortskaffes ved Tilføjelse af et nyt Kraftsystem, og saaledes bliver man ved, indtil de Kraftsystemer, man opererer med, er blevet saa smaa, at U -Fladen kan bestemmes med den ønskede Nøjagtighed. Eksempel 1 illustrerer Fremgangsmaaden.

Eksempel 1.

Simpelt understøttet kvadratisk Plade (Sidelinie D) med ensformigt fordelt Belastning p , Fig. 3. Beregning af Skalarmomenter.

$b, 2$	$b, 3$	$b, 4$	$c, 3$	$c, 4$	$d, 4$
1000	1000	1000	1000	1000	1000
— 500	— 250 — 250 — 250	— 500 — 250	— 500 — 500	— 250 — 500 — 250	— 1000
500	750	750	1000	1000	1000
— 375	— 125 — 188 — 250	— 375 — 250	— 375 — 500	— 188 — 500 — 250	— 1000
375	563	625	875	938	1000
— 281	— 94 — 156 — 219	— 281 — 235	— 281 — 469	— 156 — 438 — 250	— 938
281	469	516	750	844	938
— 235	— 70 — 129 — 188	— 235 — 211	— 235 — 422	— 129 — 375 — 235	— 844
235	387	446	657	739	844
— 193	— 59 — 112 — 164	— 193 — 185	— 193 — 370	— 112 — 328 — 211	— 739
193	335	378	563	651	739

Paa Grund af Symmetrien er kun de mærkede 6 Punkter betragtet. Dog maa man erindre, at der ved Beregningen af de konjugerede Kræfter i et Punkt kommer Bidrag fra samtlige Nabopunkter.

Man ser af Skemaet, at de Kræfter, man efterhaanden tilføjer, bliver mindre og mindre, men Konvergenen er langsom. Dette skyldes, at de tilføjede Kræfter kun bortskaffer de konjugerede Kræfter, der forefindes, men ikke tager Hensyn til de konjugerede Kræfter, der kommer til. Disse sidste kan man tage et vist Hensyn til ved at gøre de tilføjede ν -Kræfter større end Summen af de forhaandenværende konjugerede Kræfter. Derved kan Konvergenen fremskyndes betydeligt. Fremgangsmaaden forklares lettest i Tilknytning til et Eksempel.

Eksempel 2.

Simpelt understøttet kvadratisk Plade (Sidelinie l) med ensformigt fordelt Belastning p , Fig. 3. Beregning af Skalarmomenter.

	$b, 2$	$b, 3$	$b, 4$	$c, 3$	$c, 4$	$d, 4$
$a_1 \dots$	1000	1000	1000	1000	1000	1000
$b_1 \dots$ {	— 500	— 250	— 500	— 500	— 250	— 1000
		— 250	— 250	— 500	— 500	
		— 250			— 250	
$c_1 \dots$ {		— 250	— 1000	— 1000	— 750	— 5400
					— 1750	
$d_1 \dots$	500	1000	1750	2000	3500	6400
$e_1 \dots$	500	1000	1250	1500	1900	
$c_2 \dots$ {	— 1000	— 750	— 1350	— 2700	— 1600	— 2400
		— 875	— 800	— 800	— 400	
		— 250			— 1500	
$d_2 \dots$	500	875	900	2000	1600	2400
$e_2 \dots$	500	725	700	1000	800	
$c_3 \dots$ {	— 800	— 400	— 600	— 1200	— 600	— 500
		— 750	— 450	— 450	— 150	
		— 150			— 400	
$d_3 \dots$	300	575	350	650	350	500
$e_3 \dots$	300	325	250	150	150	
$c_4 \dots$ {	— 450	— 150	— 125	— 250	— 125	— 80
		— 200	— 50	— 50	15	
		— 50			— 100	
$d_4 \dots$	150	75	— 75	150	60	80
$e_4 \dots$	50	25	15	50	20	
$c_5 \dots$ {	— 50	15	— 20	— 40	— 20	— 6
		— 50	— 8	— 8	— 4	
		— 2			0	

	b, 2	b, 3	b, 4	c, 3	c, 4	d, 4
$d_5 \dots$	0	12	13	— 2	4	5
$e_5 \dots$	8	4	3	2	1	
$c_6 \dots$	— 8	— 4	— 1	— 2	— 1	
		0	0	0	0	
		0			0	
$d_6 \dots$	0	0	— 2	0	0	
$U' =$	3.808	5.616	6.154	8.500	9.385	10.385 $\times p l^2$
$U =$	0.0264	0.0390	0.0427	0.0590	0.0652	0.0721 $\times p l^2$
Prøve	3.808	5.616	6.154	8.500	9.385	10.385
	2.808	0.952	2.808	2.808	1.539	9.385
		1.539	2.346	4.692	4.250	
		2.125			2.596	
	2.808	4.616	5.154	7.500	8.385	9.385

I den vandrette Rubrik a_1 er angivet de ydre Kræfter, i Rubrik b_1 de dertil svarende konjugerede Kræfter. I Rubrik d_1 er under $(b, 2)$ anbragt en Kraft, der ophæver de konjugerede Kræfter i Punktet, altsaa Kraften 500, i Rubrik e_1 er tilføjet Kraften 500, som skal tage Hensyn til de kommende konjugerede Kræfter. De til Summen af Kræfterne i d_1 og e_1 svarende konjugerede Kræfter er anført i Rubrik c_1 . I Rubrik d_1 er under $(b, 3)$ anbragt en Kraft, der ophæver de konjugerede Kræfter i Punktet, altsaa Kraften 1000, i Rubrik e_1 er yderligere tilføjet Kraften 1000. Den til Summen af de 2 nævnte Kræfter svarende konjugerede Kraft, der angriber i $(b, 2)$, opføres i Rubrik c_2 , medens de konjugerede Kræfter, der angriber i $(b, 4)$ og $(c, 3)$, opføres i Rubrik c_1 . Det næste Punkt, der behandles, er $(b, 4)$. De tilføjede Kræfter er $1750 + 1250$. Den konjugerede Kraft, der angriber i $(b, 3)$, opføres i Rubrik c_2 , medens den konjugerede Kraft, der angriber i $(c, 4)$, opføres i Rubrik c_1 . Paa denne Maade fortsætter man, indtil man har været alle Systempunkterne igennem, hvorefter man begynder forfra. De i Rubrik d_1

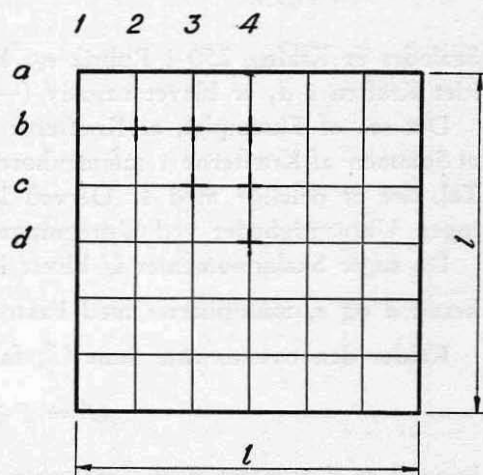


Fig. 3.

staaende Kræfter ophæver som nævnt Summen af Kræfterne i b_1 og c_1 , hvorimod Kræfterne i e_1 skal imødegaa de kommende konjugerede Kræfter, altsaa Kræfterne i c_2 . I d_2 skal derfor anbringes Kræfter, der svarer til Summen af Kræfterne i Rubrikkerne c_2 og e_1 .

Hvor store Kræfter, der skal anbringes i e_1, e_2, e_3, \dots , kan man naturligvis ikke vide paa Forhaand, det kan kun siges, at man skal vælge Kræfterne rigeligt store; har man valgt dem for store, viser det sig derved, at de tilsvarende Kræfter i den paafølgende Rubrik d bliver negative.

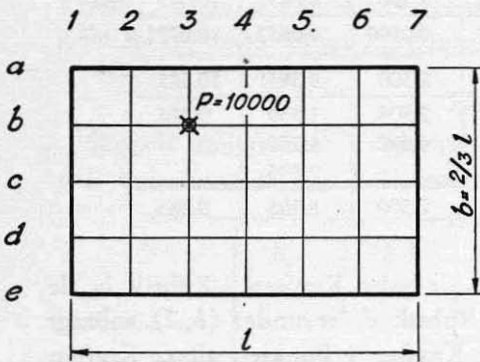


Fig. 4.

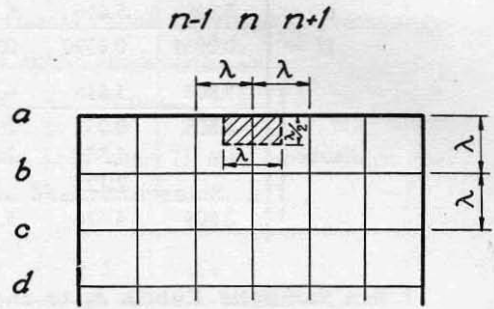


Fig. 5.

Saaledes er Kraften 250 i Rubrik e_3 , Punkt $(b, 4)$ aabenbart lidt for stor, idet Kraften i d_4 er blevet negativ (-75).

Det ses af Eksemplet, at Kræfterne i Rubrikkerne e er valgt saaledes, at Summen af Kræfterne i sammenhørende Rubrikker d og e bliver runde Tal, der er delelige med 4. Derved lettes Regningerne, og der indføres ingen Unøjagtigheder ved Udregningen af de konjugerede Kræfter.

De søgte Skalarmomenter U bliver lig Summen af Kræfterne i Rubrikkerne d og e , multipliceret med Faktoren $\frac{1}{4}$.

Kaldes den ovennævnte Sum U' , faar man

$$U' = P + \Sigma R, \quad (7)$$

hvor P er den givne ydre Belastning, og hvor ΣR holder Ligevægt med de konjugerede Kræfter svarende til $P + \Sigma R$. Belastes derfor Pladen med U' og de til U' svarende konjugerede Kræfter, bliver den resulterende Belastning den oprindeligt givne. Eller udtrykt paa en anden Maade:

Den numeriske Sum i et Systempunkt af de til en U' -Belastning svarende konjugerede Kræfter er lig $U' - P$ i Punktet.

Dette kan anvendes som en simpel Prøve paa Regningens Rigtighed og Nøjagtighed. Prøven er vist i Eksempel 2 og 3.

Eksempel 3.

Simpelt understøttet rektangulær Plade (Sidelinier l og $\frac{2}{3}l$) belastet med en Enkelkraft i Punkt $(b, 3)$, Fig. 4. Beregning af Skalarmomenter.

$b, 2$	$b, 3$	$b, 4$	$b, 5$	$b, 6$	$c, 2$	$c, 3$	$c, 4$	$c, 5$	$c, 6$	$d, 2$	$d, 3$	$d, 4$	$d, 5$	$d,$
	10000													
-2500		-2500				-2500								
	-800	-700	-1000	-300	-800	-700	-1100	-300	-100	-400	-1100	-700	-300	-1
							-400	-1100	-700	-300		-200	-500	-400
2500	800	3200	1000	300	800	3600	2200	1000	400	400	1300	1200	700	3
700	2000	800	200	100	800	800	700	200	100	400	700	400	100	
-700	-1000	-300	-100		-1100	-700	-300	-125		-500	-400	-200	-100	
-400	-1100	-700	-300	-125	-200	-500	-400	-200	-100	-200	-200	-100	-100	-
	-150	-125	-100	-100	-150	-125	-100	-100	-50		-100	0	15	-
						-200	-200	-100	-100					
400	250	325	300	125	650	725	300	325	150	300	0	-100	85	
200	250	75	100	75	150	75	100	75	50	100		40	15	
-125	-100	-100	-50		-200	-100	-100	-50		0	15	-25	0	
-200	-200	-100	-100	-50	-100	0	15	-25	0	-60	-40	-25	-25	
	-50	-50	-50	-50	-50	-50	-50	-50	-10		10	-5	-5	-
						-60	-40	-25	-25					
125	100	175	100	25	200	135	75	75	-15	-40	15	15	15	
75	100	25	100	15	40	25	25	25	-5		5	5	5	
-50	-50	-50	-10		-40	-25	-25	5		-5	-5	-5	0	
-60	-40	-25	-25	5	10	-5	-5	-5	0	0	-2	-5	10	
	-10	0	-15	15	-10	0	0	15	15	+10	-2	-1	-2	
						0	2	-5	+10					
35	0	50	-50	-35	0	5	22	-35	-15	5	4	6	-15	-
5		10	-10	-5		3	-2	-5	-5	3		2	-3	-
0	-15	15	10		-2	-5	10	5		-1	-2	4	3	
0	-2	-5	10	5	-2	-1	-2	4	3	-1	-1	4	4	
	+1	-3	6	5	1	-3	6	5	2		0	0	3	
						-1	-1	4	4					
-5	16	-17	-16	-5	3	7	-11	-13	-4	-1	3	-10	-7	
1	-4	-7	-4	-3	1	-3	-5	-3		1	-3	-2	-1	
-3	6	5	2		-1	4	4	1		0	3	2	0	
-1	-1	4	4	1	0	0	3	2	0	0	1	1	1	
	-1	1	1	1	-1	1	1	1	0		0	0	0	
						0	1	1	1					
3	0	-3	-3	1	1	-2	-4	-2	-1	-1	-1	-1	0	
-1	-2	-2			-1	-1								
4038	13510	4631	1717	593	2644	5369	3300	1642	655	1167	2023	1555	896	38
1010	3377	1158	429	148	661	1342	825	411	164	292	506	389	224	9

b, 2	b, 3	b, 4	b, 5	b, 6	c, 2	c, 3	c, 4	c, 5	c, 6	d, 2	d, 3	d, 4	d, 5	d, 6
4038	13510	4631	1717	593	2644	5369	3300	1642	655	1167	2023	1555	896	3
3377	1010	3377	1158	429	1010	3377	1158	429	148	661	1342	825	411	1
	1158	429	148		1342	661	1342	825	411	506	292	506	389	2
661	1342	825	411	164		825	411	164			389	224	97	
					292	506	389	224	97					
4038	3510	4631	1717	593	2644	5369	3300	1642	656	1167	2023	1555	897	3

Pladerne i Eksempel 2 og 3 er behandlet i *N. J. Nielsen*: Bestemmelse af Spændinger i Plader ved Anvendelse af Differensligninger. Resultaterne fundne ved de to Metoder stemmer nøje overens.

Beregning af Snitmomenter.

Snitmomenterne findes ved Hjælp af Ligningerne (3), naar Nedbøjningerne kendes. Nedbøjningerne beregnes paa samme Maade som Skalar-momenterne, idet der som Belastning indgaar Størrelserne $U \frac{1-\nu^2}{EI}$, hvor U er de fundne Skalarmomenter.

Beregning af Forskydningskræfter.

Forskydningskræfterne er bestemt ved Ligningerne (4) og er analoge med Tværkræfterne i Bjælker. Forskydningskræfterne ved Pladekanterne er analoge med Bjælkereaktionerne. Man faar (Fig. 5):

$$T = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{4} U' + \frac{1}{2} p \lambda^2 \right). \quad (8)$$

Søges saaledes Forskydningskraften i Punktet (a, 4) i den i Eksempel 2 behandlede Plade, faas

$$T = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{4} 6,154 p \lambda^2 + 0,500 p \lambda^2 \right) = 0,34 pl.$$

Den nøjagtige Beregning efter *Levy's* Formler giver samme Resultat.